OpenCurve

a bit of maths and physics. for everyone.

De normaalkracht bij een versnelde rotatiebeweging in een vlak met polaire coördinaten

door @kjrunia
2019-06-27

Dit artikel is mogelijk op het niveau van bachelorstudenten natuurkunde.

In dit artikel leiden we een vergelijking af voor de normaalkracht op een massa in een versnelde rotatiebeweging in een vlak met gebruikmaking van polaire coördinaten. Zo'n vergelijking is zeer nuttig om de omstandigheden te berekenen waaronder de massa uit zijn circulaire baan zal vliegen. Uiteraard zijn er talloze situaties waarbij we de normaalkracht zouden moeten kunnen vinden. Hier zullen we echter een systeem zoals weergegeven in Figuur 1 beschouwen. Soms is het verkrijgen van een vergelijking in termen van de gegeven variabelen niet eenvoudig. In stap 7 tref je daartoe een handig truc aan waarmee je tot een vergelijking komt in termen van een simpele θ in plaats van de initieel verkregen tweedegraads afgeleide $\ddot{\theta}$.

Notatie

We passen Newtons notatie toe waar mogelijk aangezien het de meest compacte vorm is. Als $\mathbf{x}$ bijvoorbeeld een vector is dan worden hiervan de eerste- en tweedegraads afgeleiden ten opzichte van tijd t respectievelijk genoteerd als

$$\dot{\mathbf{x}} \text{ en } \ddot{\mathbf{x}}.$$

In andere gevallen waarbij het handig is om te expliciteren dat we te maken hebben met tijdsafhankelijke afgeleiden — bijvoorbeeld om een tijdsintegraal te berekenen — zullen we de notatie van Leibniz toepassen, dat wil zeggen

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \text{ en } \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}.$$

De opdracht

Bestudeer het systeem van Figuur 1. Stel dat we voor het systeem staan. Massa m is bevestigd aan een modeldraad. Op $t = 0$ rust het ter hoogte van het centrum van de cilinder met radius R met het draad langs de bovenkant. Een constante kracht $\mathbf{P}$ trekt de draad naar beneden. Op een later tijdstip t zal massa m via de bovenkant glijden met een wrijvingscoëfficiënt μ. De hoek θ is de hoek tussen de initiële positie van m en zijn huidige positie zoals weergegeven in de figuur. Bereken de normaalkracht op m en bewijs daarmee dat de straal van de cilinder hier irrelevant is.

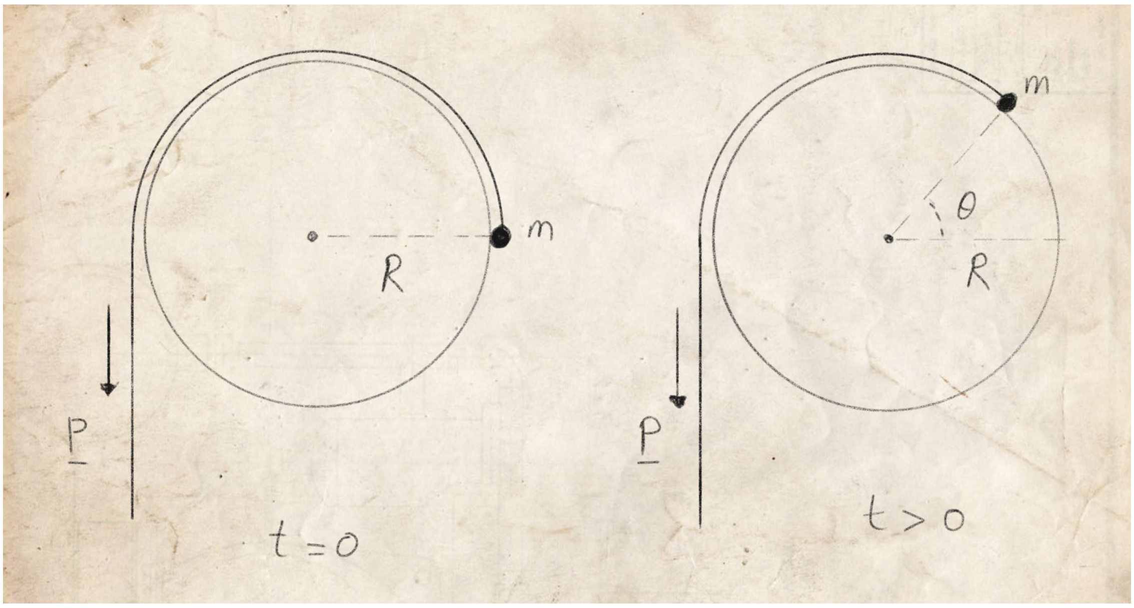

Figure 1: Het systeem

Stap 1. Krachtendiagram en eenheidsvectoren

Het is van essentieel belang om een schets te maken van de krachten, parameters en de eenheidsvectoren. We kiezen hier de radiale eenheidsvector en de tangente eenheidsvector. Dit maakt de berekening een stuk eenvoudiger. Zie Figuur 2.

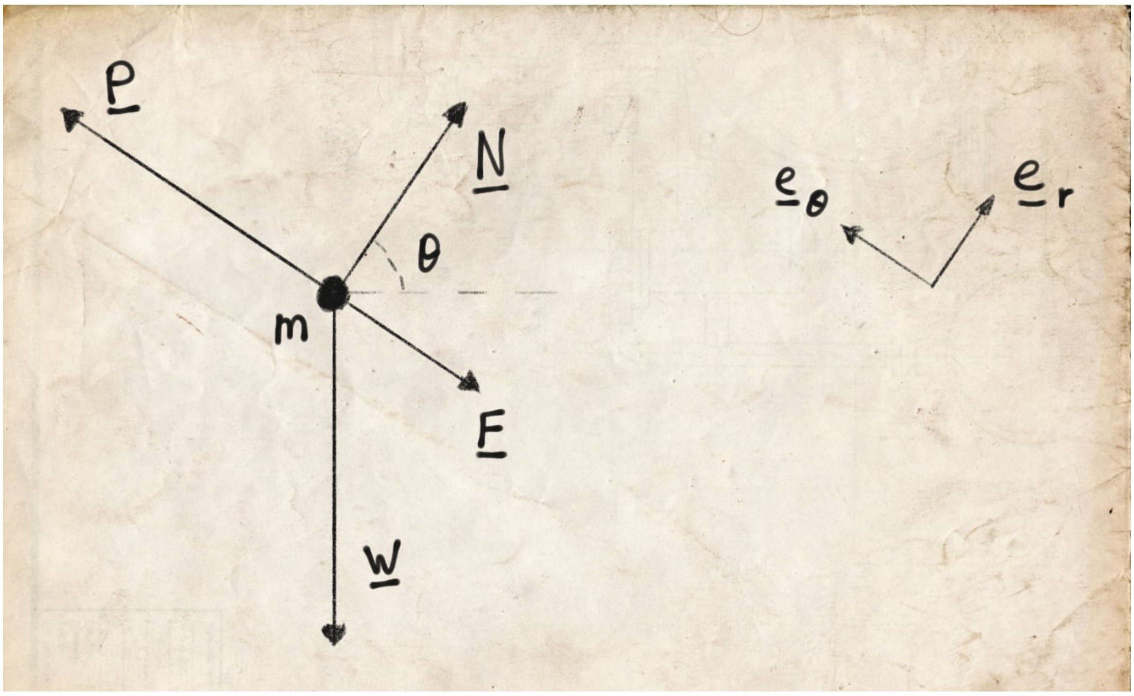

Figure 2: Krachtendiagram en eenheidsvectoren op tijd $t > 0$

We onderscheiden de volgende krachten op m:

$\mathbf{P}$ is de vector die de constante trekkracht op de modeldraad representeert,
$\mathbf{N}$ is de vector die de normaalkracht op m door de cilinder representeert,
$\mathbf{F}$ is de vector voor de wrijvingskracht,
$\mathbf{W}$ is de vector voor het gewicht van m als gevolg van het zwaartekrachtveld van de planeet waar het systeem zich bevindt,
$\mathbf{e}_r$ is de radiale eenheidsvector,
$\mathbf{e}_\theta$ is de tangente eenheidsvector.

Stap 2. Toepassing van Newtons tweede wet

Aangezien het een dynamisch systeem betreft, waarbij m zich in een versnelde cirkelvormige beweging bevindt, passen we Newtons tweede wet toe. Om precies te zijn, deze vorm:

$$\sum \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}, \tag{1}$$

waarbij $\ddot{\mathbf{r}}$ de snelheidsverandering in de tijd is, oftewel, het tweedegraads tijdsderivaat van de verplaatsingsvector $\mathbf{r}$ van massa m. We kunnen nu de componenten van de som der vectoren onderscheiden zoals we al eerder deden in stap 1. En dus, vergelijking (1) wordt

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{F} + \mathbf{W}. \tag{2}$$

Stap 3. Herschrijf de krachten in termen van hun grootte en eenheidsvectoren

Aangezien trekkracht $\mathbf{P}$ met grootte $|\mathbf{P}|$ in de richting van de tangente eenheidsvector $\mathbf{e}_\theta$ acteert, kunnen we voor $\mathbf{P}$ schrijven:

$$\mathbf{P} = |\mathbf{P}|\mathbf{e}_\theta. \tag{3}$$

We hebben geen nadere informatie over deze kracht, dus dit is wat het is.

De normaalkracht $\mathbf{N}$ wijst in de richting van de radiale eenheidsvector $\mathbf{e}_r$, dus kunnen we schrijven:

$$\mathbf{N} = |\mathbf{N}|\mathbf{e}_r. \tag{4}$$

Wrijving $\mathbf{F}$ opereert in de tegenovergestelde richting van de tangente eenheidsvector $\mathbf{e}_\theta$, dus plaatsen we een min-teken in de uitdrukking. Bovendien, aangezien een (droge) wrijvingskracht normaal gesproken gemodelleerd wordt door het product van de wrijvingscoëfficiënt en de normaalkracht, kunnen we schrijven:

$$\mathbf{F} = \mu|\mathbf{N}|(-\mathbf{e}_\theta). \tag{5}$$

Ten slotte is gewicht de kracht als gevolg van de zwaartekracht: $|\mathbf{W}| = mg$, waarbij g de gravitatieconstante is. Niettemin moeten we ook deze kracht in termen van zijn componenten langs de radiale en parallel met de tangente eenheidsvectoren opschrijven. Aangezien deze laatsten omhoog wijzen terwijl de eerste omlaag wijst, weten we al dat beide componenten een min-teken verkrijgen, namelijk $(-\mathbf{e}_r)$ en $(-\mathbf{e}_\theta)$. Wat overblijft is de correcte vergelijking voor de grootte van het gewicht in termen van de eenheidsvectoren.

Om duidelijk aan tonen hoe we een uitdrukking voor $\mathbf{W}$ in termen van zijn componenten parallel aan $\mathbf{e}_r$ en $\mathbf{e}_\theta$ verkrijgen, zie Figure 3. Wat je ziet is de gewichtsvector $\mathbf{W}$ van het krachtendiagram in Figuur 2, inclusief de radiale en tangentiële eenheidsvectoren $\mathbf{e}_r$ and $\mathbf{e}_\theta$. Voor de duidelijkheid hebben we deze op de plek van massa m afgebeeld. Tevens zijn er de twee componentvectoren in de tegenovergestelde richting van de eenheidsvectoren waarvoor we de expressies moeten vinden.

Stel, componentvector $\mathbf{v}_r = a(-\mathbf{e}_r)$ en componentvector $\mathbf{v}_\theta = b(-\mathbf{e}_\theta)$, waar a en b twee waarden zijn zodanig dat de vectorsom van $\mathbf{v}_r$ en $\mathbf{v}_\theta$ gelijk is aan $\mathbf{W}$. Met andere woorden,

$$\mathbf{W} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta = a(-\mathbf{e}_r) + b(-\mathbf{e}_\theta). \tag{6}$$

Om waarden te vinden voor de grootte van a en b gebruiken het feit dat de magnitude $|\mathbf{W}| = mg$. Dus, gebruikmakende van middelbareschooltrigonometrie concluderen we

$$a = mg\sin\theta, \tag{7}$$
$$b = mg\cos\theta. \tag{8}$$

Nu kunnen we $\mathbf{W}$ in termen van zijn componenten opstellen, gebruikmakende van de in vergelijking (6) te substitueren situaties van vergelijking (7) en (8):

$$\mathbf{W} = mg\sin\theta(-\mathbf{e}_r) + mg\cos\theta(-\mathbf{e}_\theta). \tag{9}$$

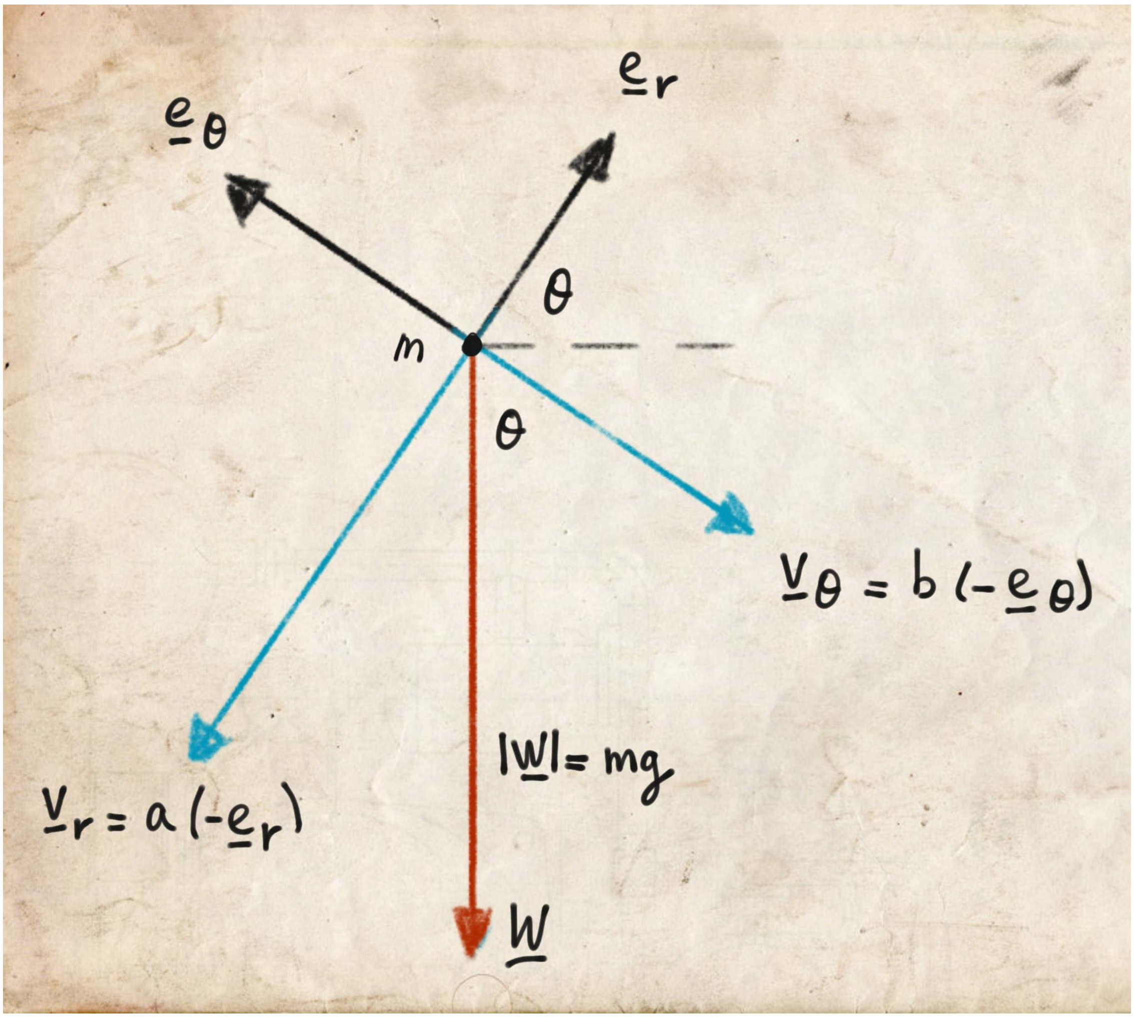

Figure 3: De componenten van **W**

En dus, als we vergelijkingen (3), (4), (5), en (9) in vergelijking (2) substitueren, krijgen we:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} &= |\mathbf{P}|\mathbf{e}_\theta + |\mathbf{N}|\mathbf{e}_r + \mu|\mathbf{N}|(-\mathbf{e}_\theta) \\ &\quad + mg\sin\theta(-\mathbf{e}_r) + mg\cos\theta(-\mathbf{e}_\theta). \end{aligned} \tag{10}$$

Stap 4. Druk de Cartesiaanse $\ddot{\mathbf{r}}$ uit in polaire coördinaten

We weten dat de vergelijking van het tweedegraads tijdsderivaat van de versnelde cirkelvormige beweging

$$\ddot{\mathbf{r}} = -R\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + R\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta, \tag{11}$$

waarbij R de straal van de rotatie is, i.e. de cilinder. We vervolgen door vergelijking (11) in (10) te substitueren.

En dus verkrijgen we

$$\begin{aligned} m(-R\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + R\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta) &= |\mathbf{P}|\mathbf{e}_\theta + |\mathbf{N}|\mathbf{e}_r + \mu|\mathbf{N}|(-\mathbf{e}_\theta) \\ &\quad + mg\sin\theta(-\mathbf{e}_r) + mg\cos\theta(-\mathbf{e}_\theta), \end{aligned}$$

wat, uiteraard, uitgewerkt, verwordt tot

$$\begin{aligned} -mR\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + mR\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta &= |\mathbf{P}|\mathbf{e}_\theta + |\mathbf{N}|\mathbf{e}_r + \mu|\mathbf{N}|(-\mathbf{e}_\theta) \\ &\quad + mg\sin\theta(-\mathbf{e}_r) + mg\cos\theta(-\mathbf{e}_\theta). \end{aligned} \tag{12}$$

Stap 5. Radiaal en tangentieel ontbinden

We kunnen nu vergelijking (12) in zijn radiale en tangentiële componenten ontbinden:

$$\mathbf{e}_r : -mR\dot{\theta}^2 = N - mg\sin\theta, \tag{13}$$

$$\mathbf{e}_\theta : mR\ddot{\theta} = P - \mu N - mg\cos\theta. \tag{14}$$

Stap 6. Construeer de bewegingsvergelijking in polaire coördinaten

Herschikking van vergelijking (14) leidt tot de volgende tweedegraads differentiaalvergelijking van beweging:

$$\ddot{\theta} = \frac{P - \mu N - mg\cos\theta}{mR}. \tag{15}$$

Hoewel we nu al vergelijking (14) hadden kunnen oplossen voor N zou dit niettemin de opname van het tweedegraads tijdsderivaat betekenen van θ. In plaats daarvan willen we een expressie voor N in termen van een simpele θ. Dit betekent dat we ons op een of andere wijze moeten ontdoen van $\ddot{\theta}$. Het is niet direct duidelijk hoe vergelijking (14) of (15) moet worden bewerkt om dit te bereiken. Er is echter een mooie truc.

Stap 7. De truc

Kijk naar de volgende vergelijking waar we de kettingregel toepassen:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}\dot{\theta}}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = 2\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = 2\dot{\theta}\ddot{\theta}. \tag{16}$$

Dus, als we vergelijking (15) in (16) substitueren, verkrijgen we

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t} = 2\dot{\theta}\left(\frac{P - \mu N - mg\cos\theta}{mR}\right). \tag{17}$$

Als we nu beide zijden integreren ten opzichte van de tijd, verkrijgen we

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t &= \int 2\dot{\theta}\left(\frac{P - \mu N - mg\cos\theta}{mR}\right)\mathrm{d}t,\\
\dot{\theta}^2 + A &= 2\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\left(\frac{P - \mu N - mg\cos\theta}{mR}\right)\mathrm{d}t,\\
&\quad \text{waarbij } A \text{ een willekeurige constante is,}\\
\dot{\theta}^2 + A &= 2\int \left(\frac{P - \mu N - mg\cos\theta}{mR}\right)\mathrm{d}\theta,\\
\dot{\theta}^2 + A &= \frac{2}{mR}\int (P - \mu N - mg\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta,\\
\dot{\theta}^2 + A &= \frac{2}{mR}\left(P\int 1\,\mathrm{d}\theta - \mu N\int 1\,\mathrm{d}\theta - mg\int \cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right),\\
\dot{\theta}^2 + A &= \frac{2P\theta}{mR} - \frac{2\mu N\theta}{mR} - \frac{2mg\sin\theta}{mR} + B,\\
&\quad \text{waarbij } B \text{ een willekeurige constante is,}\\
\dot{\theta}^2 &= \frac{2P\theta}{mR} - \frac{2\mu N\theta}{mR} - \frac{2g\sin\theta}{R} + B - A,\\
\dot{\theta}^2 &= \frac{2P\theta}{mR} - \frac{2\mu N\theta}{mR} - \frac{2g\sin\theta}{R} + C, \qquad (18)\\
&\quad \text{waarbij } C = B - A.
\end{aligned}$$

Om het probleem van initiële conditie op te lossen om de waarde van C te vinden, gebruiken we het feit dat op tijdstip $t = 0$, hoek $\theta = 0$, en dus $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$. Dit levert op $C = 0$ in vergelijking (18), en dus verkrijgen we

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2P\theta}{mR} - \frac{2\mu N\theta}{mR} - \frac{2g\sin\theta}{R}. \tag{19}$$

Let wel, we hebben nu een vergelijking voor $\dot{\theta}^2$, die al verscheen in vergelijking (13). We kunnen daarom vergelijking (19) in (13) substitueren:

$$-mR\left(\frac{2P\theta}{mR} - \frac{2\mu N\theta}{mR} - \frac{2g\sin\theta}{R}\right) = N - mg\sin\theta. \tag{20}$$

Verder uitgewerkt en opnieuw geschikt, levert

$$\begin{aligned} N - mg\sin\theta &= -2P\theta + 2\mu N\theta + 2mg\sin\theta, \\ N - 2\mu N\theta &= -2P\theta + 2mg\sin\theta + mg\sin\theta, \\ N(1 - 2\mu\theta) &= -2P\theta + 3mg\sin\theta, \\ N &= \frac{3mg\sin\theta - 2P\theta}{1 - 2\mu\theta}. \end{aligned} \tag{21}$$

En dus hebben we nu een uitdrukking voor N in termen van de gravitatieconstante g, de variabelen m, μ en P, en de veel handzamere θ in plaats van $\dot{\theta}^2$.

Als we willen berekenen wanneer een massa uit de bocht zal vliegen schrijven we $N = 0$, aangezien hier de massa fysiek niet langer op de cilinder rust (er wordt immers niet langer een normaalkracht op de massa uitgeoefend). Met andere woorden, vind de nulpunten van vergelijking (21) om de onbekende variabele te vinden. Merk op dat R geen rol meer speelt. Houd daarbij uiteraard in het achterhoofd dat m als puntmassa is gemodelleerd.